Schwarzkörperstrahlung

Das Plancksche Strahlungsgesetz beschreibt die spektrale Strahldichte pro Raumwinkel des idealen schwarzen Körpers:

$$L_\lambda(\lambda, T) = \frac{\partial L(\lambda, T)}{\partial \lambda} = \frac{2hc^2}{n^2\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{kn\lambda T}} - 1}$$

Für die Darstellung des Spektrums in histogrammähnlicher Darstellung wird die über ein Wellenlängenintervall $\Delta\lambda$ integrierte Strahlungsleistung in Abhängigkeit der mittleren Wellenlänge λ_m des jeweiligen Intervalls aufgetragen. Für kleine Wellenlängenintervalle lässt sich das Integral annähern:

$$\Delta\Phi(\lambda_\mathsf{m}) = \int\limits_{\lambda_\mathsf{m} - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_\mathsf{m} + \frac{\Delta\lambda}{2}} \mathsf{d}\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \approx \Phi(\lambda_\mathsf{m}) \cdot \Delta\lambda \propto \Phi(\lambda_\mathsf{m})$$

Die Strahldichte in der Einheit $\mathsf{W/m2/sr}$ hängt mit der Strahlungsleistung über

$$L = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\Omega \partial A \cos\epsilon}$$

zusammen. Ist Φ unabhängig vom Raumwinkel Ω oder vom Winkel ϵ unter dem das Licht durch eine Fläche A tritt, so gilt:

$$\Phi \propto L$$

Damit gilt für $\Delta\Phi$ in der Einheit W mit obiger Näherung:

$$\Delta\Phi_{\mathsf{energ.}}(\lambda_\mathsf{m}) = \Phi(\lambda_\mathsf{m}, T) \cdot \Delta\lambda \propto \frac{\Delta\lambda}{\lambda^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{0{,}014\,388\,\mathrm{mK}}{\lambda T}} - 1\right)}$$

spektrale Empfindlichkeit

Zusammen mit der spektralen Hellempfindungskurve des menschlichen Auges $(V(\lambda))$ erhält man aus dem Strahlungsfluss $\Phi_{\mathsf{energ.}}$ in der Einheit W den entsprechenden Wert in der Einheit lm.

$$\Phi_{\mathsf{vis.}} = 683\,\mathrm{lm/W} \cdot \int\limits_{380\,\mathrm{nm}}^{780\,\mathrm{nm}} \mathsf{d}\lambda V(\lambda) \Phi_{\mathsf{energ.}}(\lambda)$$

Für einem histogrammähnlichen Spektrum erhält man

$$\Phi_{\mathsf{vis.}} = 683\,\mathrm{lm/W} \cdot \sum_m V(\lambda_\mathsf{m}) \Phi_{\mathsf{energ.}}(\lambda_\mathsf{m}) \Delta\lambda$$

maximale Lichtausbeute eines Schwarzkörperstrahlers

Die Lichtausbeute in der Einheit lm/W ist definiert als

$$\eta = \frac{\Phi_{\text{vis.}}}{P} = \frac{\Phi_{\text{vis.}}}{\int \Phi_{\text{energ.}}}$$

Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die abgestrahlte Leistung eines Schwarzkörperstrahlers

$$P = 5{,}67\,\mathrm{W/m^2/K^2}AT^4$$

bzw. in obiger Proportionalitätsbetrachtung, auf die sich die Berechnung des Lichtstroms stüzt:

$$P = \int \Phi_{\text{energ.}} = \int_0^\infty \frac{\Delta\lambda}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{0{,}014\,388\,\mathrm{mK}}{\lambda T}} - 1\right)}$$

Damit gilt:

$$\eta = 683\,\mathrm{lm/W}\frac{\int_{380\,\mathrm{nm}}^{780\,\mathrm{nm}} \mathrm{d}\lambda \frac{V(\lambda)}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{0{,}014\,388\,\mathrm{mK}}{\lambda T}} - 1\right)}}{\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{0{,}014\,388\,\mathrm{mK}}{\lambda T}} - 1\right)}}$$

bei Betrachtung der gesamten Leistung (auch UV und IR)